אלגברה — בוחן אמצע 18.12: סיכום קצר

Nov 23, 2026 · @Lev

בבוחן האמצע במתמטיקה (18.12) יש שמונה סוגי שאלות באלגברה (ועוד שלושה בגאומטריה — הם לא כאן). לכל סוג: הסבר, שלבים עם הסיבה לכל שלב, המקרים שחוזרים במבחן, דוגמה פתורה אחת ומלכודות. בסוף — צ׳ק־ליסט, 24 תרגילים לבד ותשובות. שם כל נושא הוא קישור לדף המלא באתר, עם עוד דוגמאות ותרגילים.

1. פישוט ביטוי אלגברי

פישוט ביטוי הוא בעיקר פירוק לגורמים. כמעט תמיד הביטוי בנוי כך שאחרי פירוק כל מונה ומכנה הרבה גורמים מצטמצמים, והתוצאה קצרה (לפעמים מספר). אם אחרי הפישוט נשאר ביטוי מסובך — כנראה פספסתם פירוק.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$, $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

סדר העבודה קבוע: קודם בתוך סוגריים (מכנה משותף), אחר כך חילוק הופך לכפל בהפוך, ורק בסוף צמצום. כל צמצום מחייב לרשום תנאי: הגורם שצמצמנו שונה מאפס.

שלבים

1. מפרקים כל מונה וכל מכנה לגורמים. — *זה 80% מהעבודה.*
2. רושמים תחום: כל גורם במכנה (גם של שבר שמחלקים בו) $\neq 0$. — *הביטוי המקורי לא מוגדר שם.*
3. מחשבים סוגריים: מכנה משותף, מחברים מונים, ומפרקים שוב. — *לעיתים המונה החדש מתפרק יפה.*
4. חילוק בשבר — כפל בהופכי. — *אז הכול כפל אחד גדול.*
5. מצמצמים גורמים זהים במונה ובמכנה. — *רק גורמים — לא מחוברים!*
6. אם ביקשו הצבה — מציבים בביטוי המפושט. — *מספרים "מפחידים" הופכים פשוטים.*

מקרים שחוזרים במבחן

- **תוצאה מספרית:** הרבה שאלות בנויות כך שהכול מצטמצם ל-1, 2 או -1 — סימן טוב שהפישוט נכון.
- **שורשים במכנה:** כפל בצמוד: $1/(a-\sqrt{b})=(a+\sqrt{b})/(a-b)$.
- **חזקות שליליות:** $a^{-1}=1/a$; כופלים מונה ומכנה ב-ab כדי להיפטר מהן.
- **הצבת מספרים גדולים:** קודם מפשטים באותיות, ורק אז מציבים — לא להפך.

דוגמה פתורה. פשטו: $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1. תחום: $x\neq\pm y$ (ו-$x^2+y^2\neq 0$). — *כל מכנה שונה מאפס.*
2. *מצטמצם במונה xy; מכנה משותף* — $\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}$.
3. *כל הגורמים מצטמצמים* — $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$. $\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}$

בדיקה: $x=2, y=1$: $(2-1/3)\cdot 3/5=5/3\cdot 3/5=1$ ✓.

מלכודות

- מצמצמים מחוברים: a≠b/(a+b).
- שוכחים לרשום תחום הגדרה.
- הופכים את השבר הלא נכון בחילוק.
- טועים בסימן בפירוק a-b=-(b-a).

2. אי-שוויון רציונלי: גורמים, חזקות וערך מוחלט

אי-שוויון רציונלי פותרים בטבלת סימנים, ולא בכפל במכנה: כופלים אי-שוויון בביטוי רק אם יודעים את הסימן שלו, ובמכנה עם x אנחנו לא יודעים. הרעיון: ביטוי שהוא מכפלה ומנה של גורמים משנה סימן רק בנקודות שבהן גורם מתאפס. בין שתי נקודות כאלה הסימן קבוע — מספיק לבדוק נקודה אחת בכל קטע.

((x-a)(x-b))/(x-c) ⩾ 0

שלושה דברים עושים את השאלה "מבחנית": חזקה זוגית (x-1)² שלא משנה סימן (רק מאפסת), גורם בערך מוחלט שתמיד אי-שלילי, וביטוי שחוזר על עצמו (כמו x²+x) שמזמין הצבה t=x²+x.

> נקודות של המכנה תמיד ריקות (לא בתשובה). נקודות של המונה מלאות כשהסימן ⩽ או ⩾, וריקות כשהוא < או >.

שלבים

1. מעבירים הכול לצד אחד ולמכנה משותף, כך שבצד השני יהיה 0. — *רק מול אפס אפשר לדבר על סימן.*
2. מפרקים מונה ומכנה לגורמים ליניאריים (או ריבועיים בלי שורשים). — *כל גורם — נקודת אפס אחת.*
3. רושמים תחום הגדרה: כל גורם במכנה ≠0. — *הנקודות האלה לעולם לא בתשובה.*
4. מסמנים את כל נקודות האפס על ציר, לפי הסדר. — *הן מחלקות את הציר לקטעים.*
5. קובעים סימן בקטע הימני ביותר (שם כל גורם חיובי, אם המקדמים חיוביים), ומתקדמים שמאלה: בכל נקודה הסימן מתהפך — חוץ מנקודה של חזקה זוגית. — *זה חוסך הצבה בכל קטע.*
6. בוחרים את הקטעים לפי הסימן הנדרש ומוסיפים נקודות קצה מלאות. — *בודקים שוב שאף נקודה של מכנה לא נכנסה.*

מקרים שחוזרים במבחן

- **חזקה זוגית:** (x-1)² לא משנה סימן. אם האי-שוויון חלש (⩾) — הנקודה x=1 פתרון בודד, גם אם הקטעים סביבה לא.
- **גורם בערך מוחלט:** |x-2|⩾0: בודקים לבד את x=2, ובשאר הציר מתעלמים מהגורם (הוא חיובי).
- **ריבועי בלי שורשים:** x²+x+1>0 תמיד (Δ<0, a>0) — מוחקים אותו מהטבלה.
- **ביטוי חוזר:** ב-((x²+x)+12(x²+x)-8)²/(…) מציבים t=x²+x, פותרים עבור t, ואז פותרים כל אי-שוויון ב-x.

דוגמה פתורה. פתרו: $\frac{(x-1)(x+4)^2}{x^2-x-6}\leqslant 0$.

1. תחום: $x\neq 1,\ x\neq -4$. — *פירוק המונה:* $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. $\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2(x+4)}\geqslant 0$
2. נקודות: -4 (ריקה), -2 (מלאה), 1 (ריקה, זוגית), 3 (מלאה). — *מכנה — ריקה; מונה עם $\leqslant$ — מלאה.*
3. סימנים מימין לשמאל: $(3,\infty)$: +; $(1,3)$: −; $(-1,1)$: − (לא מתהפך ב-1); $(-2,-1)$: +; $(-4,-2)$: −. — *מתחילים מימין, מתהפכים בכל נקודה רגילה.*
4. תשובה: $x\geqslant 3$ או $-2<x\leqslant -4$. — *קטעים חיוביים ונקודות האפס של המונה.*

בדיקה: הצבה $x=0$: $\frac{(-6)}{4}<0$ ✓; $x=-3$: $\frac{6}{(16\cdot 1)}>0$ ✓.

מלכודות

- כופלים במכנה בלי לדעת את סימנו.
- הופכים סימן בנקודה של חזקה זוגית.
- מכניסים לתשובה נקודה שמאפסת את המכנה.
- שוכחים פתרון בודד בנקודה של חזקה זוגית כשהאי-שוויון חלש.

3. משוואות ואי-שוויונות עם שורש

משוואה עם שורש פותרים בהעלאה בריבוע — אבל העלאה בריבוע יכולה להוסיף פתרונות זרים (כי גם -3 וגם 3 נותנים 9). לכן או שרושמים תנאים מראש, או שבודקים כל פתרון בסוף. במבחן עושים את שניהם.

$\sqrt{f}=g \Leftrightarrow f=g^2$ וגם $g\geqslant 0$

באי-שוויונות זהירות כפולה: מותר להעלות בריבוע רק כששני האגפים אי-שליליים. לכן מפצלים למקרים לפי הסימן של האגף שאין בו שורש:

$\sqrt{f}<g \Leftrightarrow f\geqslant 0,\ g>0,\ f<g^2$

$\sqrt{f}>g \Leftrightarrow (g<0,\ f\geqslant 0)$ או $(g\geqslant 0,\ f>g^2)$

שלבים

1. תחום הגדרה: כל ביטוי מתחת לשורש $\geqslant 0$. — *מחוץ לתחום אין משמעות לביטוי.*
2. מבודדים שורש אחד באגף אחד. — *רק אז ההעלאה בריבוע מסלקת אותו.*
3. תנאי סימן: האגף השני $\geqslant 0$ (במשוואה). — *שורש אף פעם לא שלילי.*
4. מעלים בריבוע ופותרים. עם שני שורשים — מבודדים ומעלים שוב. — *לעיתים צריך פעמיים.*
5. בודקים כל פתרון בתנאים או בהצבה במשוואה המקורית. — *כך נפטרים מפתרונות זרים.*

מקרים שחוזרים במבחן

- **שורש = ביטוי ליניארי:** $\sqrt{x+3}=x-3$: תנאי $x\geqslant 3$, ריבוע נותן $x^2-7x+6=0$, ונשאר רק $x=6$.
- **שני שורשים:** מעבירים שורש אחד לצד השני, מעלים בריבוע, מבודדים את השורש שנשאר ומעלים שוב.

- **הצבה:** $x+\sqrt{x-6}=0$: $t=\sqrt{x}\geq 0$, $t^2+t-6=0$, $t=2$, $x=4$.
- **שורש קטן מביטוי:** שלושה תנאים יחד: תחום, אגף ימין חיובי, ריבוע.

דוגמה פתורה. פתרו: $\sqrt{(x+5)}<x-1$.

1. תחום: $x\geq -5$. — *מתחת לשורש.*
2. מקרה 1: $x-1<0$, כלומר $x<1\geq -5$ — כל התחום הזה פתרון. — *שורש תמיד גדול ממספר שלילי.*
3. מקרה 2: $x-1\geq 0$: $x+5>(x-1)^2 \Rightarrow x^2-3x-4<0 \Rightarrow -1<x<4$, ועם $x\geq 1$: $1\leq x<4$. — *מותר לרבע — שני האגפים אי-שליליים.*
4. איחוד: $-5\leq x<4$. — *אחד המקרים מספיק.*

בדיקה: $x=4$: $3<3$ לא ✓ (גבול לא נכלל); $x=0$: $\sqrt{5}>-1$ ✓.

מלכודות

- לא בודקים פתרונות זרים.
- מעלים בריבוע אי-שוויון כשאגף אחד יכול להיות שלילי.
- שוכחים את המקרה $g<0$ ב-$\sqrt{f}>g$.
- מעלים בריבוע $\sqrt{a}+b$ כאילו זה $a+b$.

4. מערכת שתי משוואות לינאריות עם פרמטר

מערכת של שתי משוואות ליניאריות היא שני ישרים במישור. יש רק שלוש אפשרויות: הישרים נחתכים (פתרון יחיד), מקבילים (אין פתרון) או מתלכדים (אינסוף פתרונות). הפרמטר קובע איזו מהן. הכלי: הדטרמיננטה — היא אפס בדיוק כשהישרים מקבילים או מתלכדים.

$$a_1x+b_1y=c_1,\ a_2x+b_2y=c_2,\ D=a_1b_2-a_2b_1$$

$$x=(c_1b_2-c_2b_1)/D,\ y=(a_1c_2-a_2c_1)/D$$

אם $D\neq 0$ — פתרון יחיד. אם $D=0$ — מציבים את ערך הפרמטר במערכת ובודקים: אם המשוואות הן כפולה זו של זו — אינסוף פתרונות; אם רק אגפי שמאל פרופורציוניים — אין פתרון.

שלבים

1. מחשבים D כביטוי בפרמטר ומוצאים מתי $D=0$. — *אלה הערכים החשודים.*
2. לכל ערך שבו $D=0$ — מציבים ובודקים: אינסוף או אין פתרון. — *אין דרך לדעת בלי הצבה.*
3. ל-$D\neq 0$ — מוצאים x ו-y (נוסחת קרמר או חילוץ). — *מצמצמים כשאפשר, תוך זכירת התחום.*
4. תנאים על הפתרון (רביע, מעל ישר): מציבים את $x(a), y(a)$ בתנאי ופותרים אי-שוויון בפרמטר. — *לרוב אי-שוויון רציונלי — טבלת סימנים.*
5. מוציאים מהתשובה ערכים שבהם $D=0$. — *שם אין פתרון יחיד.*

מקרים שחוזרים במבחן

- **פתרון יחיד:** $D\neq 0$.

- **אינסוף פתרונות:** $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$.
- **אין פתרון:** $a_1/a_2=b_1/b_2\neq c_1/c_2$.
- **פתרון ברביע מסוים:** רביע ראשון: $x>0$ וגם $y>0$; רביע רביעי: $x>0$ וגם $y<0$.

דוגמה פתורה. נתונה המערכת $ax+2y=4,\ 2x+ay=a+2$. (א) מתי יש פתרון יחיד, ומהו? (ב) מתי אין פתרון ומתי אינסוף? (ג) לאילו a הפתרון ברביע הראשון?

1. $D=a^2-4$; $D=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$. — *$a\cdot a-2\cdot 2$.*
2. $x=(4a-2(a+2))/(a^2-4)=2/(a+2)$, $y=(a(a+2)-8)/(a^2-4)=(a+4)/(a+2)$. — *מצמצמים $(a-2)$.*
3. $a=2$: שתי המשוואות $x+2y=4$ — *המשוואות זהות*. אינסוף פתרונות.
4. $a=-2$: $-2x+2y=4$ ו־$2x-2y=0$ — *אגפי שמאל נגדיים, אגפי ימין לא*. סתירה, אין פתרון.
5. (ג) $x>0 \Rightarrow a>-2$; $y>0 \Rightarrow a<-4$ או $a>2$. יחד: $a>-2,\ a\neq 2$. — *מוציאים את $a=2$ (אין פתרון יחיד).*

בדיקה: $a=0$: $2x=2,\ 2y=4$, כלומר $(1,2)$; לפי הנוסחה $x=1,\ y=2$ ✓.

מלכודות

- מחלקים ב-D בלי לבדוק מתי הוא אפס.
- קובעים "אין פתרון" לכל $D=0$ בלי הצבה.
- שוכחים להוציא את ערכי $D=0$ מתשובת תנאי הרביע.

5. משוואה ריבועית עם פרמטר: מיקום השורשים

כשנשאלים איפה נמצאים השורשים של $f(x)=ax^2+bx+c$ (עם פרמטר) — לא פותרים את המשוואה! פותרים בעזרת תכונות הפרבולה: יש שורשים? (Δ), איפה הקודקוד? ($x_v=-b/2a$), ומה הסימן של f בנקודה נתונה. שלושת הכלים האלה מספיקים לכל מקרה.

$\Delta=b^2-4ac$, $x_v=-b/2a$, $x_1+x_2=-b/a$, $x_1x_2=c/a$

הרעיון של $a\cdot f(k)$: אם $a\cdot f(k)<0$, הנקודה k נמצאת בין השורשים (הפרבולה "פתוחה" ו-$f(k)$ בצד השני). אם $a\cdot f(k)>0$, שני השורשים באותו צד של k — ואז הקודקוד מגלה באיזה צד.

> תמיד לבדוק לחוד את המקרה $a=0$: המשוואה הופכת ליניארית ויש לה שורש אחד (או אף אחד).

שלבים

1. כותבים $a,\ b,\ c$ כביטויים בפרמטר. אם a יכול להתאפס — בודקים את המקרה לחוד. — *במקרה הזה אין פרבולה.*
2. מתרגמים את הדרישה למצב של הפרבולה מול הנקודות הנתונות (בשרטוט). — *שרטוט קטן מראה אילו תנאים צריך.*
3. רושמים את כל התנאים: Δ, מיקום הקודקוד, $a\cdot f(k)$ בכל נקודת גבול. — *בכל מקרה טיפוסי יש רשימה קבועה (ראו בהמשך).*
4. פותרים כל תנאי לחוד. — *לרוב אי-שוויונים ריבועיים בפרמטר.*

5. חותכים את כל הפתרונות (וגם). — *צריך שכל התנאים יתקיימו.*
6. בודקים ערך גבולי אחד בהצבה. — *לוודא שלא נכנס או נפל ערך בטעות.*

מקרים שחוזרים במבחן

- **k בין השורשים:** $a\cdot f(k)<0$ — זה הכול.
- **שני השורשים גדולים מ-k:** $\Delta>0,\ x_v>k,\ a\cdot f(k)>0$.
- **שני השורשים קטנים מ-k:** $\Delta>0,\ x_v<k,\ a\cdot f(k)>0$.
- **שני השורשים בקטע (p,q):** $\Delta>0,\ p<x_v<q,\ a\cdot f(p)>0,\ a\cdot f(q)>0$.

דוגמה פתורה. לאילו ערכי m יש למשוואה $x^2-2mx+m+2=0$ שני שורשים שונים, ששניהם גדולים מ-1?

1. $\Delta=4m^2-4(m+2)>0 \Rightarrow m^2-m-2>0 \Rightarrow m<-1$ או $m>2$. — *שני שורשים שונים.*
2. $x_v=m>1$. — *הקודקוד בין השורשים, ולכן מימין ל-1.*
3. $f(1)=1-2m+m+2=3-m>0 \Rightarrow m<3$. — *הפרבולה חיובית ב-1: שני השורשים באותו צד.*
4. חיתוך: $2<m<3$. — *כל שלושת התנאים יחד.*

בדיקה: $m=2.5$: $x^2-5x+4.5=0$, $x=(5\pm\sqrt{7})/2\approx 1.18,\ 3.82$ — שניהם מעל 1 ✓.

מלכודות

- שוכחים את המקרה $a=0$.
- מסתפקים ב-$f(k)>0$ בלי לכפול ב-a.
- שוכחים את תנאי הקודקוד ומקבלים שורשים בצד הלא נכון.
- מאחדים ("או") במקום לחתוך ("וגם").

6. משוואה דו-ריבועית או עם $|x|$: מספר פתרונות

משוואה שבה x מופיע רק דרך x^2 (משוואה דו-ריבועית, כמו $x^4-5x^2+4=0$) או רק דרך $|x|$ (כמו $x^2-3|x|+2=0$) פותרים בהצבה: $t=x^2$ או $t=|x|$. מקבלים משוואה ריבועית ב-t. החוכמה בשאלות "מספר פתרונות" היא לתרגם כל פתרון t למספר פתרונות ב-x:

- $t>0$ נותן שני פתרונות: $x=\pm\sqrt{t}$ (או $x=\pm t$).
- $t=0$ נותן פתרון אחד: $x=0$.
- $t<0$ לא נותן אף פתרון.

לכן "בדיוק 3 פתרונות" פירושו: שורש אחד $t=0$ ושורש אחד חיובי. "בדיוק 2" — שורש חיובי יחיד (כפול, או שהשני שלילי). "4" — שני שורשים חיוביים שונים.

> כשהמשוואה ב-t מתפרקת יפה (למשל $t=1$ או $t=m$), אין צורך ב-Δ — עוברים על המקרים של m ישירות.

שלבים

1. מציבים $t=x^2$ (או $t=|x|$) וכותבים את המשוואה ב-t. — *תמיד $t\geq 0$.*
2. מתרגמים את מספר הפתרונות הנדרש ב-x למצב של השורשים ב-t. — *לפי הכלל, $t>0\to 2$, $t=0\to 1$, $t<0\to 0$.*
3. אם אפשר — פותרים את המשוואה ב-t במפורש. — *לעיתים קרובות היא מתפרקת.*
4. אחרת — משתמשים בכלים של מיקום שורשים: Δ, סכום, מכפלה. — *למשל "שורש אחד 0": $c=0$.*
5. עוברים על כל ערכי הפרמטר הקריטיים לחוד. — *שם מספר הפתרונות משתנה.*

מקרים שחוזרים במבחן

- **בדיוק 4 פתרונות:** שני שורשים חיוביים שונים: $\Delta>0$, $t_1+t_2>0$, $t_1t_2>0$.
- **בדיוק 3 פתרונות:** $t=0$ שורש ($c=0$) והשורש השני חיובי.
- **בדיוק 2 פתרונות:** שורש כפול חיובי, או שורשים בסימנים שונים ($t_1t_2<0$).
- **בדיוק פתרון אחד:** $t=0$ שורש והשני שלילי, או שורש כפול $t=0$.

דוגמה פתורה. כמה פתרונות יש למשוואה $x^4-(m+1)x^2+m=0$, לפי ערכי m?

1. $t^2-(m+1)t+m=0 \Rightarrow t=1$ או $t=m$. — *פירוק: סכום השורשים $m+1$, מכפלתם m.*
2. $t=1$ תמיד נותן שני פתרונות: $x=\pm 1$. — *$t>0$.*
3. $m<0$: $t=m$ שלילי — סך הכול 2. — *אין פתרון מ-$t=m$.*
4. $m=0$: $t=0$ נותן $x=0$ — סך הכול 3. — *פתרון אחד מ-$t=0$.*
5. $0<m<1$ או $m>1$: 4 פתרונות; $m=1$: שורש כפול — 2. — *שני שורשים חיוביים שונים, או אחד.*

בדיקה: $m=4$: $x^4-5x^2+4=0$, $x=\pm 1,\pm 2$ — ארבעה ✓.

מלכודות

- סופרים פתרונות ב-t במקום ב-x.
- שוכחים ש-$t<0$ לא נותן כלום.
- סופרים $t=0$ כשני פתרונות.

7. גרף עם ערכים מוחלטים ומספר פתרונות

שאלות "כמה פתרונות יש ל-$f(x)=k$" נפתרות בגרף ולא באלגברה: מספר הפתרונות שווה למספר נקודות החיתוך של הגרף $y=f(x)$ עם הישר האופקי $y=k$. לכן משרטטים את f פעם אחת, ואז "מזיזים" את הישר מלמטה למעלה וסופרים חיתוכים.

גרפים עם ערכים מוחלטים בונים בשכבות. כל שכבה היא פעולה פשוטה על הגרף הקודם:

- $|f(x)|$ — החלק שמתחת לציר משתקף מעליו x.
- $f(x)-c$ — כל הגרף יורד ב-c.
- $f(|x|)$ — מוחקים את הצד הימני y ומשקפים את מה שמשמאל לציר.

הנקודות החשובות בשרטוט: קודקודים, נקודות חיתוך עם הצירים ו"שפיצים" של ערך מוחלט. ערכי k שעוברים בהן הם הגבולות שבהם מספר הפתרונות משתנה.

שלבים

1. מתחילים מהפונקציה הפנימית (בדרך כלל פרבולה): קודקוד ונקודות אפס. — *זה השלד שעליו בונים.*
2. מוסיפים שכבה אחרי שכבה (ערך מוחלט, הזזה, ערך מוחלט נוסף), ומעדכנים את הנקודות המיוחדות. — *כל שכבה משנה רק חלק מהגרף.*
3. רושמים את ערכי y של כל נקודה מיוחדת (קודקודים, שפיצים). — *אלה ערכי k הקריטיים.*
4. עוברים על הקטעים בין ערכי k הקריטיים, ובכל קטע ובכל ערך קריטי סופרים חיתוכים. — *גם ערך גבולי הוא מקרה נפרד.*
5. עונים לשאלה: לאילו k יש בדיוק n פתרונות. — *לרוב התשובה היא קטע פתוח או ערכים בודדים.*

מקרים שחוזרים במבחן

- **$|x^2-4x|=k$:** k<0 — אין פתרון; k=0 — 0 שניים; 0<k<4 — ארבעה; k=4 — שלושה; k>4 — שניים.
- **$||f|-c|=k$:** אחרי ההזזה למטה חלק מהגרף שוב מתחת לציר — הוא משתקף ויוצר "שפיצים" חדשים בגובה 0 ו"גבעות" בגובה c.
- **$f(|x|)=k$:** הגרף סימטרי: כל פתרון x>0 נותן גם פתרון ב- x. נספר פעם אחת x=0.
- **כמה פתרונות למשוואה עם פרמטר:** מעבירים את הפרמטר לצד אחד: f(x)=k, ואז אותה שיטה.

דוגמה פתורה. לאילו ערכי k יש למשוואה $||x^2-4x|-2|=k$ בדיוק 6 פתרונות?

1. $y=|x^2-4x|$: הקודקוד *(2,-4)* משתקף ל-*(2,4)* — x=2. אפסים ב-0, 4; גבעה בגובה 4.
2. $y=|x^2-4x|-2$: *הזזה למטה ב-2*. האפסים יורדים לגובה -2, הגבעה לגובה 2.
3. עולים לגובה 2, ונוצרים אפסים חדשים; הגבעה נשארת בגובה x=0,4 — ערך מוחלט שוב: השפיצים ב *החלקים השליליים משתקפים*. 2.
4. *ערכי קריטיים: 0 ו-2*. הגרף נוגע בגובה 2 בשלוש נקודות (שני שפיצים וגבעה) ויורד ל-0 בארבע נקודות. — *סופרים בכל קטע*.
5. 0<k<2: שמונה חיתוכים; k=2: חמישה; k>2: שניים; k=0: ארבעה.
6. אין k עם בדיוק 6 פתרונות. — *המספר 6 לא מופיע ברשימה*.

בדיקה: $|x^2-4x|=3$: k=1 (ארבעה פתרונות) או $|x^2-4x|=1$ (ארבעה) — יחד שמונה ✓.

מלכודות

- שוכחים לשקף את החלק שמתחת לציר.
- לא סופרים בנפרד את ערכי k הקריטיים.
- מבלבלים בין |f(x)| ל-f(|x|).

8. מקום גיאומטרי עם ערך מוחלט

מקום גיאומטרי הוא קבוצת כל הנקודות (x,y) שמקיימות משוואה. עם ערכים מוחלטים פותרים בפיצול למקרים לפי הסימן של כל ביטוי בתוך ערך מוחלט: בכל רביע (ביחס לנקודת המרכז) המשוואה היא ישר, ויחד הם יוצרים צורה שבורה.

|x-a|+|y-b|=r

הצורה הכי נפוצה: ריבוע מסובב ב-45° ("יהלום") שמרכזו (a,b) וקודקודיו במרחק r מהמרכז לאורך הצירים: (a±r,b) ו-(a,b±r). הצלעות בשיפוע ±1.

> |x-a|+|y-b|⩽r הוא כל השטח בתוך היהלום; |x|=|y| הוא שני הישרים y=±x.

שלבים

1. מוצאים את הנקודות שבהן הביטויים בערך מוחלט מתאפסים — הן מחלקות את המישור לאזורים. — *בכל אזור הסימנים ידועים.*
2. בכל אזור פותחים את הערכים המוחלטים ומקבלים משוואת ישר. — *רק החלק שבתוך האזור שייך לצורה.*
3. משרטטים את כל הקטעים ומזהים את הצורה (יהלום, מלבן, זוג ישרים). — *קודקודים — בנקודות המעבר בין אזורים.*
4. לשאלת מערכת עם ישר: משרטטים את הישר במצבים שונים של הפרמטר ומציבים קודקודים במשוואת הישר. — *שם מספר החיתוכים משתנה.*

דוגמה פתורה. |y-2|+|x-1|=4 והישר y=2x+m: מתי יש נקודה משותפת אחת בדיוק?

1. קודקודים: (5,2), (3,2-), (1,6), (1,2-).
2. דרך (1,6): m=4+2=6 ⇒ m; דרך (1,2-): m=-4. — *מגע בקודקוד.*
3. תשובה: m=±4. ביניהם — שתי נקודות; מחוץ להם — אף אחת.

מלכודות

- משרטטים את הישר בכל המישור ולא רק באזור שלו.
- קודקודי היהלום — על הקווים האופקי והאנכי דרך המרכז, לא באלכסון.
- שוכחים מקרה שבו הישר מתלכד עם צלע.

צ׳ק־ליסט לפני המבחן

- [x] ~~בכל שבר — תחום הגדרה רשום, ונקודות המכנה לא בתשובה.~~
- [x] ~~בכל שורש — התנאים נבדקו אחרי העלאה בריבוע.~~
- [x] ~~בכל פרמטר — המקרים המיוחדים (a = 0, D = 0, ערכי k קריטיים) נבדקו בנפרד.~~
- [x] ~~תנאים של "וגם" — חיתוך; מקרים נפרדים — איחוד.~~
- [x] ~~קצה הקטע: סוגר מרובע רק כשהנקודה באמת מקיימת את התנאי.~~

- [x] ~~הצבת ערך אחד מהתשובה בשאלה המקורית — חצי דקה שמצילה נקודות.~~

רוצים לתרגל בתנאי מבחן? סימולציה של בוחן האמצע.