מכינה · מתמטיקה · בוחן אמצע 18.12

אלגברה לבוחן האמצע

שמונה סוגי השאלות באלגברה: רעיון, שלבים, דוגמה פתורה, מלכודות — ו־56 תרגילים ברמת מבחן עם תשובות.

8
סוגי שאלות

56
תרגילים

מפת הנושאים

שמונה סוגים, שלושה שקפים לכל אחד ואחריהם תרגול

1

פישוט ביטוי אלגברי

2

אי-שוויון רציונלי: גורמים, חזקות וערך מוחלט

3

משוואות ואי-שוויונות עם שורש

4

מערכת שתי משוואות לינאריות עם פרמטר

5

משוואה ריבועית עם פרמטר: מיקום השורשים

6

משוואה דו-ריבועית או עם |x|: מספר פתרונות

7

גרף עם ערכים מוחלטים ומספר פתרונות

8

מקום גיאומטרי עם ערך מוחלט

פישוט ביטוי אלגברי

פישוט ביטוי הוא בעיקר פירוק לגורמים. כמעט תמיד הביטוי בנוי כך שאחרי פירוק כל מונה ומכנה הרבה גורמים מצטמצמים, והתוצאה קצרה (לפעמים מספר). אם אחרי הפישוט נשאר ביטוי מסובך — כנראה פספסתם פירוק.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\ a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2,\ a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

סדר העבודה קבוע: קודם בתוך סוגריים (מכנה משותף), אחר כך חילוק הופך לכפל בהפוך, ורק בסוף צמצום. כל צמצום מחייב לרשום תנאי: הגורם שצמצמנו שונה מאפס.

אחרי פירוק — כל זוג באותו צבע מצטמצם

$$\frac{(x+y)\quad (x-y)\quad x^2+y^2}{x^2+y^2\quad (x+y)\quad (x-y)} = 1$$

תנאי: $x \neq \pm y$

נושא 1 · שלבים

איך פותרים

1. מפרקים כל מונה וכל מכנה לגורמים.
   זה 80% מהעבודה.
2. רושמים תחום: כל גורם במכנה (גם של שבר שמחלקים בו) ≠0.
   הביטוי המקורי לא מוגדר שם.
3. מחשבים סוגריים: מכנה משותף, מחברים מונים, ומפרקים שוב.
   לעיתים המונה החדש מתפרק יפה.
4. חילוק בשבר — כפל בהופכי.
   אז הכול כפל אחד גדול.
5. מצמצמים גורמים זהים במונה ובמכנה.
   רק גורמים — לא מחוברים!
6. אם ביקשו הצבה — מציבים בביטוי המפושט.
   מספרים "מפחידים" הופכים פשוטים.

מקרים שחוזרים במבחן

תוצאה מספרית
הרבה שאלות בנויות כך שהכול מצטמצם ל-1, 2 או -1 — סימן טוב שהפישוט נכון.

שורשים במכנה
כפל בצמוד: 1/(a-√b√)=(a+√b√)/(a-b).

חזקות שליליות
a^(-1)=1/a; כופלים מונה ומכנה ב-ab כדי להיפטר מהן.

הצבת מספרים גדולים
קודם מפשטים באותיות, ורק אז מציבים — לא להפך.

נושא 1 · דוגמה פתורה

פשטו: ((x/(x-y)-y/(x+y))·(x²-y²)/(x²+y²)).

1. תחום: x≠±y (ו-x²+y²≠0).
   כל מכנה שונה מאפס.
2. (x/(x-y)-y/(x+y))=((x(x+y)-y(x-y))/((x+y)(x-y))=(x²+y²)/((x+y)(x-y)).
   מכנה משותף: xy מצטמצם במונה.
3. ((x²+y²)/((x+y)(x-y)))·((x+y)(x-y))/(x²+y²)=1.
   כל הגורמים מצטמצמים.

בדיקה: x=2, y=1: (2-1/3)·3/5=5/3·3/5=1 ✓.

מלכודות

- מצמצמים מחוברים: a≠b/(a+b).
- שוכחים לרשום תחום הגדרה.
- הופכים את השבר הלא נכון בחילוק.
- טועים בסימן בפירוק a-b=-(b-a).

פישוט ביטוי אלגברי

1. חשבו $(a^2+ab+b^2)/(a^3-b^3)$ עבור $a=1001, b=999$.

2. חשבו $1/(x-1)-2/(x^2-1)$ עבור $x=3$.

3. פשטו: $(a+2)/(a^2-4)-(a^2+2a+4)/(a^3-8)$.

4. חשבו: $1/(2\sqrt{}-5)-5\sqrt{}$.

פישוט ביטוי אלגברי

5 פשטו: $\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{xy}$.

6 פשטו וחשבו: $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ עבור $a=7.5,\ b=2.5$.

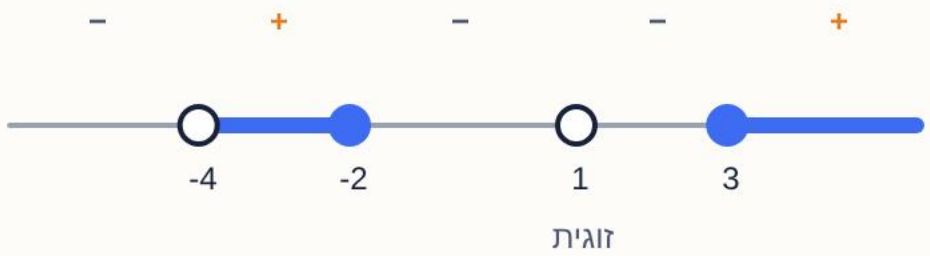
7 פשטו וחשבו: $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ עבור $a=3.7,\ b=1.3$.

נושא 1 · תשובות

תשובות ורעיון הפתרון

#	תשובה	הרעיון
1	2	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
2	0.25	מכנה משותף.
3	0	נוסחת הפרש קוביות $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
4	2	שורש במכנה מסלקים בכפל בצמוד: $(5-2\sqrt{})(5+2\sqrt{})=1$.
5	4	הפרש ריבועים: $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ עם $A=x+y,\ B=x-y$.
6	10	מפרקים את המונה להפרש ריבועים ומצמצמים לפני ההצבה.
7	5	מפרקים את המונה להפרש ריבועים ומצמצמים לפני ההצבה.

אי-שוויון רציונלי: גורמים, חזקות וערך מוחלט



אי-שוויון רציונלי פותרים בטבלת סימנים, ולא בכפל במכנה: כופלים אי-שוויון בביטוי רק אם יודעים את הסימן שלו, ובמכנה עם x אנחנו לא יודעים. הרעיון: ביטוי שהוא מכפלה ומנה של גורמים משנה סימן רק בנקודות שבהן גורם מתאפס. בין שתי נקודות כאלה הסימן קבוע — מספיק לבדוק נקודה אחת בכל קטע.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)} \geq 0$$

שלושה דברים עושים את השאלה "מבחנית": חזקה זוגית $(x-1)^2$ שלא משנה סימן (רק מאפסת), גורם בערך מוחלט שתמיד אי-שלילי, וביטוי שחוזר על עצמו (כמו x^2+x) שמזמין הצבה $t=x^2+x$.

נקודות של המכנה תמיד ריקות (לא בתשובה). נקודות של המונה מלאות כשהסימן ≤ או ≥, וריקות כשהוא < או >.

נושא 2 · שלבים

איך פותרים

1. מעבירים הכול לצד אחד ולמכנה משותף, כך שבצד השני יהיה 0.
   רק מול אפס אפשר לדבר על סימן.
2. מפרקים מונה ומכנה לגורמים ליניאריים (או ריבועיים בלי שורשים).
   כל גורם — נקודת אפס אחת.
3. רושמים תחום הגדרה: כל גורם במכנה ≠0.
   הנקודות האלה לעולם לא בתשובה.
4. מסמנים את כל נקודות האפס על ציר, לפי הסדר.
   הן מחלקות את הציר לקטעים.
5. קובעים סימן בקטע הימני ביותר (שם כל גורם חיובי, אם המקדמים חיוביים), ומתקדמים שמאלה: בכל נקודה הסימן מתהפך — חוץ מנקודה של חזקה זוגית.
   זה חוסך הצבה בכל קטע.
6. בוחרים את הקטעים לפי הסימן הנדרש ומוסיפים נקודות קצה מלאות.
   בודקים שוב שאף נקודה של מכנה לא נכנסה.

מקרים שחוזרים במבחן

חזקה זוגית
$(x-1)^2$ לא משנה סימן. אם האי-שוויון חלש (≥) — הנקודה $x=1$ פתרון בודד, גם אם הקטעים סביבה לא.

גורם בערך מוחלט
$|x-2|\geq 0$: בודקים לבד את $x=2$, ובשאר הציר מתעלמים מהגורם (הוא חיובי).

ריבועי בלי שורשים
$x^2+x+1>0$ תמיד ($\Delta<0$, $a>0$) — מוחקים אותו מהטבלה.

ביטוי חוזר
ב-$\frac{(x^2+x)(x^2+x+12)}{(\dots)^2-8(x^2+x)}$ מציבים $t=x^2+x$, פותרים עבור t, ואז פותרים כל אי-שוויון ב-x.

שבר פחות מספר
$\frac{x+1}{x-2}>3$: לא כופלים! $\frac{x+1-3(x-2)}{x-2}>0$, כלומר $\frac{-2x+7}{x-2}>0$.

נושא 2 · דוגמה פתורה

פתרו: $(x^2-x-6)/((x-1)(x+4)^2)\geq 0$.

1. $(x-3)(x+2))/((x-1)(x+4)^2)\geq 0$, תחום: $x\neq -4, x\neq 1$.
   פירוק המונה: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$.
2. נקודות: -4 (ריקה), -2 (מלאה), 1 (ריקה, זוגית), 3 (מלאה).
   מכנה — ריקה; מונה עם ≤ — מלאה.
3. סימנים מימין לשמאל: $(3,\infty)$: +; $(1,3)$: -; $(-2,1)$: - (לא מתהפך ב-1); $(-4,-2)$: +; $(-\infty,-4)$: -.
   מתחילים מימין, מתהפכים בכל נקודה רגילה.
4. תשובה: $-4<x\leq -2$ או $x\geq 3$.
   קטעים חיוביים ונקודות האפס של המונה.

בדיקה: הצבה $x=0$: $(-6)/4<0$ ✓; $x=-3$: $6/(16\cdot 1)>0$ ✓.

מלכודות

- כופלים במכנה בלי לדעת את סימנו.
- הופכים סימן בנקודה של חזקה זוגית.
- מכניסים לתשובה נקודה שמאפסת את המכנה.
- שוכחים פתרון בודד בנקודה של חזקה זוגית כשהאי-שוויון חלש.

אי-שוויון רציונלי: גורמים, חזקות וערך מוחלט

1. כמה מספרים שלמים מקיימים $\frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)} \geq 0$?
2. מהו המספר השלם החיובי הקטן ביותר שמקיים $\frac{|x+1|-4}{x-2} \leq 0$?
3. כמה מספרים שלמים בקטע $[-5,5]$ מקיימים $\frac{x^2-4x}{x^2-9} \leq 0$?
4. כמה מספרים שלמים בין 0 ל-10 (כולל) מקיימים $\frac{x+1}{x-2} < 3$?

אי-שוויון רציונלי: גורמים, חזקות וערך מוחלט

5 מהו אורך קטע הפתרון של $(x^2+x+1)/(x^2-5x+6)<0$?

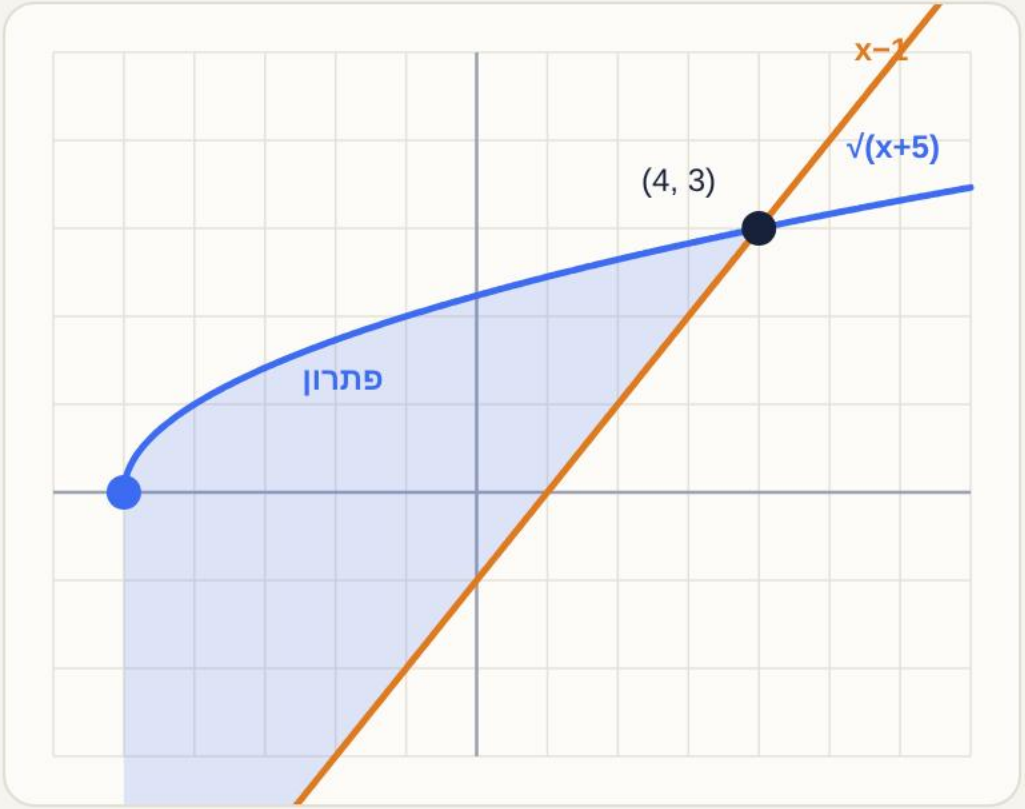
6 כמה מספרים שלמים בקטע $[-10,10]$ מקיימים $((x-1)(x+4))/(x-6)\geq 0$?

7 כמה מספרים שלמים בקטע $[-10,10]$ מקיימים $((x-3)(x+1))/(x-8)\geq 0$?

תשובות ורעיון הפתרון

#	תשובה	הרעיון
1	5	המכנה $(x-1)^2$ חיובי בכל התחום, ולכן הסימן נקבע לפי המונה בלבד.
2	3	$\|x-4\|\geq 0$, ולכן הסימן כמו $(x+1)/(x-2)$ — חוץ מ-$x=4$ שבו הביטוי 0.
3	7	פירוק מונה ומכנה, ואז טבלה עם ארבע נקודות: שתיים ריקות (מכנה) ושתיים מלאות (מונה).
4	9	אי-שוויון של שבר מול מספר: מכנה משותף ובדיקה מול 0.
5	1	גורם ריבועי בלי שורשים חיובי תמיד — אפשר להתעלם ממנו.
6	12	שלוש נקודות על הציר, טבלת סימנים, וסופרים שלמים בקטעים השליליים ובנקודות האפס.
7	15	שלוש נקודות על הציר, טבלת סימנים, וסופרים שלמים בקטעים השליליים ובנקודות האפס.

משוואות ואי-שוויונות עם שורש



משוואה עם שורש פותרים בהעלאה בריבוע — אבל העלאה בריבוע יכולה להוסיף פתרונות זרים (כי גם -3 וגם 3 נותנים 9). לכן או שרושמים תנאים מראש, או שבודקים כל פתרון בסוף. במבחן עושים את שניהם.

$$\sqrt{f}=g \Leftrightarrow f=g^2 \text{ וגם } g\geq 0$$

באי-שוויונות זהירות כפולה: מותר להעלות בריבוע רק כששני האגפים אי-שליליים. לכן מפצלים למקרים לפי הסימן של האגף שאין בו שורש:

$$\sqrt{f}<g \Leftrightarrow f\geq 0,\ g>0,\ f<g^2$$

$$\sqrt{f}>g \Leftrightarrow (g<0,\ f\geq 0) \text{ או } (g\geq 0,\ f>g^2)$$

נושא 3 · שלבים

איך פותרים

1. תחום הגדרה: כל ביטוי מתחת לשורש ≥0.
   מחוץ לתחום אין משמעות לביטוי.
2. מבודדים שורש אחד באגף אחד.
   רק אז ההעלאה בריבוע מסלקת אותו.
3. תנאי סימן: האגף השני ≥0 (במשוואה).
   שורש אף פעם לא שלילי.
4. מעלים בריבוע ופותרים. עם שני שורשים — מבודדים ומעלים שוב.
   לעיתים צריך פעמיים.
5. בודקים כל פתרון בתנאים או בהצבה במשוואה המקורית.
   כך נפטרים מפתרונות זרים.

מקרים שחוזרים במבחן

שורש = ביטוי ליניארי

√(x+3)=x-3: תנאי x≥3, ריבוע נותן x²-7x+6=0, ונשאר רק x=6.

שני שורשים

מעבירים שורש אחד לצד השני, מעלים בריבוע, מבודדים את השורש שנשאר ומעלים שוב.

הצבה

x+√x-6=0: t=√x≥0, t²+t-6=0, t=2, x=4.

שורש קטן מביטוי

שלושה תנאים יחד: תחום, אגף ימין חיובי, ריבוע.

שורש גדול מביטוי

שני מקרים: אגף ימין שלילי (אז מספיק התחום) או אי-שלילי (אז ריבוע).

נושא 3 · דוגמה פתורה

פתרו: √(x+5)>x-1.

1. תחום: x≥-5.
   מתחת לשורש.
2. מקרה 1: x-1<0, כלומר x<1≤-5 — כל התחום הזה פתרון.
   שורש תמיד גדול ממספר שלילי.
3. מקרה 2: x≥1: x+5>(x-1)²⇒ x²-3x-4<0⇒-1<x<4, ועם 1≤x<4.
   מותר לריבוע — שני האגפים אי-שליליים.
4. איחוד: x<4≥-5.
   אחד המקרים מספיק.

בדיקה: x=0: √5>-1 ✓ (גבול לא נכלל); x=4: 3>3 לא ✓.

מלכודות

- לא בודקים פתרונות זרים.
- מעלים בריבוע אי-שוויון כשאגף אחד יכול להיות שלילי.
- שוכחים את המקרה g<0 ב-√f>g.
- מעלים בריבוע √a+√b כאילו זה a+b.

משוואות ואי-שוויונות עם שורש

1. פתור: $\sqrt{(2x+1)}=x-1$.

2. כמה מספרים שלמים מקיימים $\sqrt{(x+4)}>x-2$?

3. פתרו: $\sqrt{(x+5)}+\sqrt{5}=x$.

4. כמה פתרונות שלמים יש ל-$\sqrt{(x+7)}>x+1$?

משוואות ואי-שוויונות עם שורש

5 כמה פתרונות שלמים יש ל-√(3x+1)≥2?

6 פתרו: √(x+7)=x-5.

7 פתרו: √(x+11)=x-1.

תשובות ורעיון הפתרון

#	תשובה	הרעיון
1	4	מעלים בריבוע ובודקים: x-1≥0.
2	9	שני מקרים לפי סימן x-2.
3	4	שני שורשים: מבודדים אחד, מעלים בריבוע, ונשאר שורש יחיד — מבודדים שוב.
4	9	√f>g: אם g שלילי — כל התחום פתרון; אחרת מעלים בריבוע.
5	2	שורש קטן ממספר חיובי: תחום, ואז ריבוע.
6	9	העלאה בריבוע נותנת משוואה ריבועית; את הפתרונות בודקים בתנאי x≥5 ובמשוואה המקורית.
7	5	העלאה בריבוע נותנת משוואה ריבועית; את הפתרונות בודקים בתנאי x≥1 ובמשוואה המקורית.

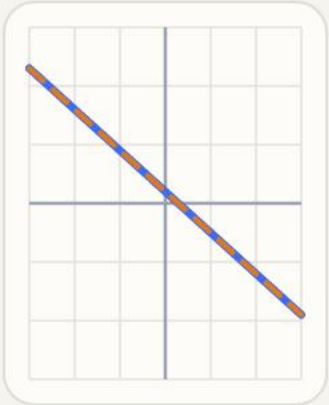
מערכת שתי משוואות לינאריות עם פרמטר

מערכת של שתי משוואות ליניאריות היא שני ישרים במישור. יש רק שלוש אפשרויות: הישרים נחתכים (פתרון יחיד), מקבילים (אין פתרון) או מתלכדים (אינסוף פתרונות). הפרמטר קובע איזו מהן. הכלי: הדטרמיננטה — היא אפס בדיוק כשהישרים מקבילים או מתלכדים.

$$a_1x+b_1y=c_1,\ a_2x+b_2y=c_2,\ D=a_1b_2-a_2b_1$$

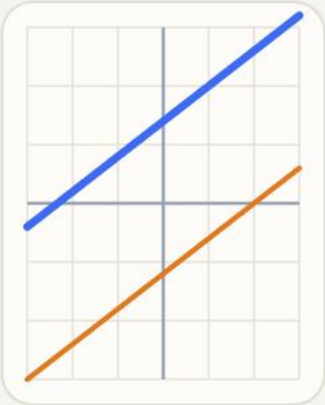
$$x=(c_1b_2-c_2b_1)/D,\ y=(a_1c_2-a_2c_1)/D$$

אם D≠0 — פתרון יחיד. אם D=0 — מציבים את ערך הפרמטר במערכת ובודקים: אם המשוואות הן כפולה זו של זו — אינסוף פתרונות; אם רק אגפי שמאל פרופורציוניים — אין פתרון.



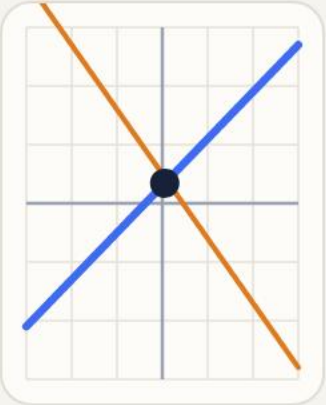
D=0

אינסוף



D=0

אין פתרון



D≠0

פתרון יחיד

נושא 4 · שלבים

איך פותרים

1. מחשבים D כביטוי בפרמטר ומוצאים מתי D=0.
   אלה הערכים החשודים.
2. לכל ערך שבו D=0 — מציבים ובודקים: אינסוף או אין פתרון.
   אין דרך לדעת בלי הצבה.
3. ל-D≠0 — מוצאים x ו-y (נוסחת קרמר או חילוץ).
   מצמצמים כשאפשר, תוך זכירת התחום.
4. תנאים על הפתרון (רביע, מעל ישר): מציבים את x(a), y(a) בתנאי ופותרים אי-שוויון בפרמטר.
   לרוב אי-שוויון רציונלי — טבלת סימנים.
5. מוציאים מהתשובה ערכים שבהם D=0.
   שם אין פתרון יחיד.

מקרים שחוזרים במבחן

פתרון יחיד

D≠0.

אינסוף פתרונות

$a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$

אין פתרון

$a_1/a_2=b_1/b_2\neq c_1/c_2$

פתרון ברביע מסוים

רביע ראשון: x>0 וגם y>0; רביע רביעי: x>0 וגם y<0.

פתרון על ישר / מעל ישר

מציבים x(a), y(a) במשוואה או באי-השוויון של הישר.

נושא 4 · דוגמה פתורה

נתונה המערכת $ax+2y=4,\ 2x+ay=a+2$. (א) מתי יש פתרון יחיד, ומהו? (ב) מתי אין פתרון ומתי אינסוף? (ג) לאילו a הפתרון ברביע הראשון?

1. $D=a^2-4$; $D=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$.
   $a\cdot a-2\cdot 2$.
2. $x=(4a-2(a+2))/(a^2-4)=2/(a+2)$, $y=(a(a+2)-8)/(a^2-4)=(a+4)/(a+2)$.
   מצמצמים $(a-2)$.
3. $a=2$: שתי המשוואות $2x+2y=4$ — אינסוף פתרונות.
   המשוואות זהות.
4. $a=-2$: $-2x+2y=4$ ו-$2x-2y=0$ — סתירה, אין פתרון.
   אגפי שמאל נגדיים, אגפי ימין לא.
5. (ג) $a<-4 \Rightarrow y>0$; $a>-2 \Rightarrow x>0$ או $a>-2$. יחד: $a>-2,\ a\neq 2$.
   מוציאים את $a=2$ (אין פתרון יחיד).

בדיקה: $a=0$: $2y=4,\ 2x=2$, כלומר $(1,2)$; לפי הנוסחה $x=1,\ y=2$ ✓.

מלכודות

- מחלקים ב-D בלי לבדוק מתי הוא אפס.
- קובעים "אין פתרון" לכל $D=0$ בלי הצבה.
- שוכחים להוציא את ערכי $D=0$ מתשובת תנאי הרביע.

מערכת שתי משוואות לינאריות עם פרמטר

1. במערכת $mx+4y=8,\ x+my=m+2$: לאיזה m יש אינסוף פתרונות?

2. לאיזה k אין פתרון למערכת $kx+y=1,\ x+ky=1$?

3. לאיזה ערך של a אין פתרון למערכת $2x+ay=3,\ ax+8y=6$?

4. לכמה ערכים שלמים של a הפתרון של $x+2y=a,\ 2x-y=a+5$ נמצא ברביע הרביעי?

מערכת שתי משוואות לינאריות עם פרמטר

5 לאיזה ערך של m הפתרון של $3x+my=6,\ mx+3y=m+3$ מקיים $y=1$?

6 לאיזה ערך של m אין למערכת $mx+6y=5\ \ 2x+3y=1$ פתרון?

7 לאיזה ערך של m אין למערכת $mx+10y=5\ \ 3x+5y=1$ פתרון?

תשובות ורעיון הפתרון

#	תשובה	הרעיון
1	2	אינסוף פתרונות: המשוואות פרופורציונליות.
2	1-	דטרמיננטה אפס ובדיקת סתירה.
3	4-	אין פתרון: D=0 אבל אגפי ימין לא באותו יחס.
4	8	פותרים כפונקציה של a ומציבים את התנאים.
5	0	מבטאים את y בעזרת m ומשווים ל-1.
6	4	אין פתרון כשהישרים מקבילים ושונים: m/2=6/3≠5/1.
7	6	אין פתרון כשהישרים מקבילים ושונים: m/3=10/5≠5/1.

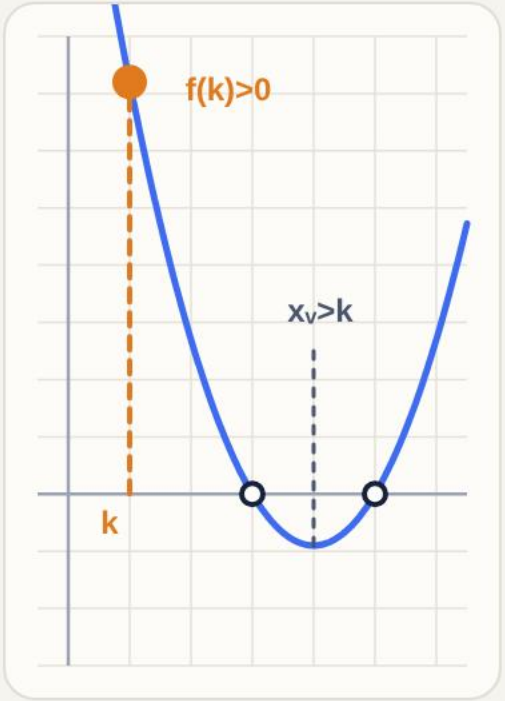
משוואה ריבועית עם פרמטר: מיקום השורשים

כשנשאלים איפה נמצאים השורשים של $f(x)=ax^2+bx+c$ (עם פרמטר) — לא פותרים את המשוואה! פותרים בעזרת תכונות הפרבולה: יש שורשים? (Δ), איפה הקודקוד? ($x_v=-b/2a$), ומה הסימן של f בנקודה נתונה. שלושת הכלים האלה מספיקים לכל מקרה.

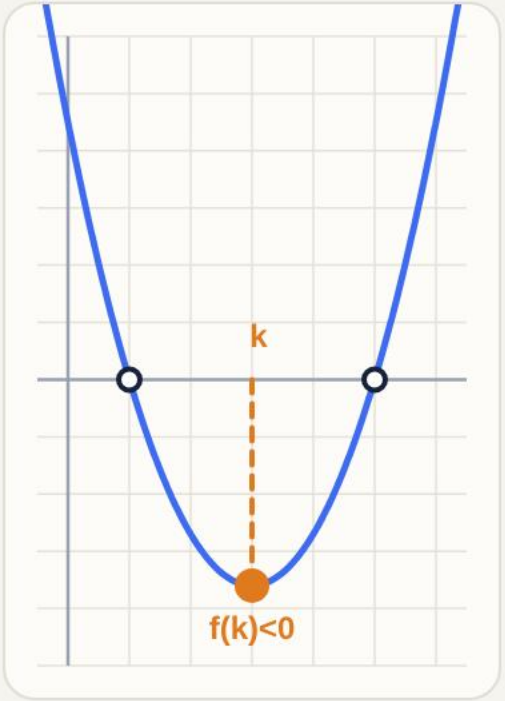
$$\Delta=b^2-4ac,\ x_v=-b/2a,\ x_1+x_2=-b/a,\ x_1x_2=c/a$$

הרעיון של $a\cdot f(k)$: אם $a\cdot f(k)<0$, הנקודה k נמצאת בין השורשים (הפרבולה "פתוחה" ו-f(k) בצד השני). אם $a\cdot f(k)>0$, שני השורשים באותו צד של k — ואז הקודקוד מגלה באיזה צד.

תמיד לבדוק לחוד את המקרה a=0: המשוואה הופכת ליניארית ויש לה שורש אחד (או אף אחד).



שניהם גדולים מ-k



בין השורשים k

נושא 5 · שלבים

איך פותרים

1. כותבים a, b, c כביטויים בפרמטר. אם a יכול להתאפס — בודקים את המקרה לחוד.
   במקרה הזה אין פרבולה.
2. מתרגמים את הדרישה למצב של הפרבולה מול הנקודות הנתונות (בשרטוט).
   שרטוט קטן מראה אילו תנאים צריך.
3. רושמים את כל התנאים: Δ, מיקום הקודקוד, $a \cdot f(k)$ בכל נקודת גבול.
   בכל מקרה טיפוסי יש רשימה קבועה (ראו בהמשך).
4. פותרים כל תנאי לחוד.
   לרוב אי-שוויונים ריבועיים בפרמטר.
5. חותכים את כל הפתרונות (וגם).
   צריך שכל התנאים יתקיימו.
6. בודקים ערך גבולי אחד בהצבה.
   לוודא שלא נכנס או נפל ערך בטעות.

מקרים שחוזרים במבחן

k בין השורשים
$a \cdot f(k) < 0$

שני השורשים גדולים מ-k
$\Delta > 0,\ x_v > k,\ a \cdot f(k) > 0$

שני השורשים קטנים מ-k
$\Delta > 0,\ x_v < k,\ a \cdot f(k) > 0$

שני השורשים בקטע (p,q)
$\Delta > 0,\ p < x_v < q,\ a\ f(p) > 0,\ a\ f(q) > 0$

קטע [p,q] בין השורשים
$a\ f(p) < 0,\ a\ f(q) < 0$

נושא 5 · דוגמה פתורה

לאילו ערכי m יש למשוואה $x^2-2mx+m+2=0$ שני שורשים שונים, ששניהם גדולים מ-1?

1. $\Delta=4m^2-4(m+2)>0 \Rightarrow m^2-m-2>0 \Rightarrow m<-1$ או $m>2$.
   שני שורשים שונים.
2. $x_v=m>1$.
   הקודקוד בין השורשים, ולכן מימין ל-1.
3. $f(1)=1-2m+m+2=3-m>0 \Rightarrow m<3$.
   הפרבולה חיובית ב-1: שני השורשים באותו צד.
4. חיתוך: $2<m<3$.
   כל שלושת התנאים יחד.

בדיקה: $m=2.5$: $x^2-5x+4.5=0$, $x=(5\pm\sqrt{7})/2\approx 1.18, 3.82$ — שניהם מעל 1 ✓.

מלכודות

- שוכחים את המקרה $a=0$.
- מסתפקים ב-$f(k)>0$ בלי לכפול ב-a.
- שוכחים את תנאי הקודקוד ומקבלים שורשים בצד הלא נכון.
- מאחדים ("או") במקום לחתוך ("וגם").

משוואה ריבועית עם פרמטר: מיקום השורשים

1 לאילו ערכי m למשוואה $x^2-mx+3=0$ שורש אחד קטן מ-2 והשני גדול מ-2?

א. $m>3.5$ ב. $m<3.5$ ג. $m>2\sqrt{3}$ ד. $m<3.5>3\sqrt{2}$

2 לאילו ערכי m יש למשוואה $x^2-2(m+1)x+m^2=0$ שני שורשים שליליים שונים?

א. $m>-1/2$ ב. $m<-1$ ג. אין ערכים כאלה ד. $m<-1/2>-1$

3 מהו הערך השלם הגדול ביותר של m שעבורו המספר 1 נמצא בין שורשי $x^2+(m-3)x+m=0$?

4 מהו הערך השלם הקטן ביותר של m שעבורו למשוואה $x^2-mx+m-2=0$ שורש אחד בדיוק בקטע $(0,1)$?

משוואה ריבועית עם פרמטר: מיקום השורשים

5 לכמה ערכים שלמים של m יש למשוואה $x^2+(m+1)x+m=0$ שני שורשים שונים, שליליים וגדולים מ--3?

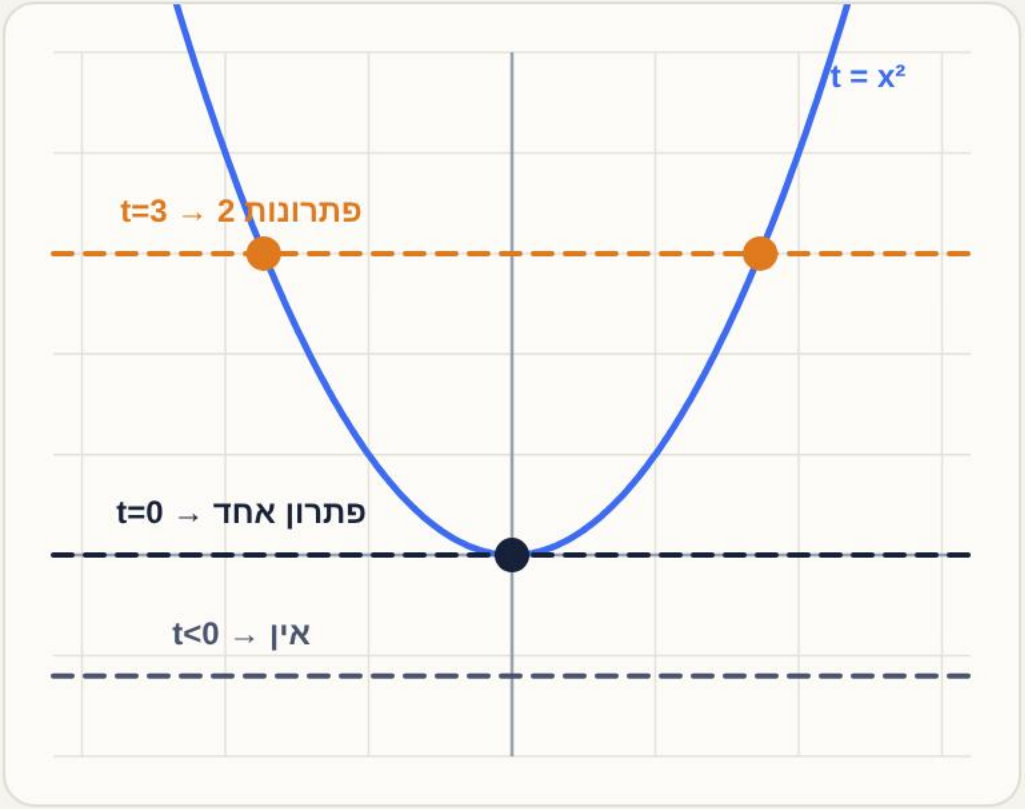
6 לכמה ערכים שלמים של k בקטע [-5,5] יש למשוואה $x^2+2kx+9=0$ שני פתרונות שונים?

7 לכמה ערכים שלמים של k בקטע [-7,7] יש למשוואה $x^2+2kx+25=0$ שני פתרונות שונים?

תשובות ורעיון הפתרון

#	תשובה	הרעיון
1	m>3.5	שורשים משני צדי 2 ⇔ f(2)<0 (כשהמקדם המוביל חיובי).
2	אין ערכים כאלה	שורשים שליליים שונים: Δ>0, סכום <0, מכפלה >0.
3	0	נקודה בין השורשים ⇔ a·f(k)<0; זה כבר מבטיח שני שורשים.
4	3	שורש יחיד בקטע: הפרבולה מחליפה סימן בין קצותיו.
5	1	השורשים -1 ו-m; דורשים ש-m בקטע ושונה מ-1.
6	4	שני פתרונות שונים פירושם דיסקרימיננטה חיובית; מקבלים אי-שוויון ב-k וסופרים שלמים.
7	4	שני פתרונות שונים פירושם דיסקרימיננטה חיובית; מקבלים אי-שוויון ב-k וסופרים שלמים.

משוואה דו-ריבועית או עם |x|: מספר פתרונות



משוואה שבה x מופיע רק דרך x^2 (משוואה דו-ריבועית, כמו $x^4-5x^2+4=0$) או רק דרך $|x|$ (כמו $x^2-3|x|+2=0$) פותרים בהצבה: $t=x^2$ או $t=|x|$. מקבלים משוואה ריבועית ב-t. החוכמה בשאלות "מספר פתרונות" היא לתרגם כל פתרון t למספר פתרונות ב-x:

- $t>0$ נותן שני פתרונות: $x=\pm\sqrt{t}$ (או $x=\pm t$).
- $t=0$ נותן פתרון אחד: $x=0$.
- $t<0$ לא נותן אף פתרון.

לכן "בדיוק 3 פתרונות" פירושו: שורש אחד $t=0$ ושורש אחד חיובי. "בדיוק 2" — שורש חיובי יחיד (כפול, או שהשני שלילי). "4" — שני שורשים חיוביים שונים.

כשהמשוואה ב-t מתפרקת יפה (למשל $t=1$ או $t=m$), אין צורך ב-Δ — עוברים על המקרים של m ישירות.

נושא 6 · שלבים

איך פותרים

1. מציבים $t=x^2$ (או $t=|x|$) וכותבים את המשוואה ב-t.
   תמיד $t\geq 0$.
2. מתרגמים את מספר הפתרונות הנדרש ב-x למצב של השורשים ב-t.
   לפי הכלל $t<0 \to 0$, $t=0 \to 1$, $t>0 \to 2$.
3. אם אפשר — פותרים את המשוואה ב-t במפורש.
   לעיתים קרובות היא מתפרקת.
4. אחרת — משתמשים בכלים של מיקום שורשים: Δ, סכום, מכפלה.
   למשל "שורש אחד 0": $c=0$.
5. עוברים על כל ערכי הפרמטר הקריטיים לחוד.
   שם מספר הפתרונות משתנה.

מקרים שחוזרים במבחן

בדיוק 4 פתרונות
שני שורשים חיוביים שונים: $\Delta>0$, $t_1+t_2>0$, $t_1t_2>0$.

בדיוק 3 פתרונות
$t=0$ שורש ($c=0$) והשורש השני חיובי.

בדיוק 2 פתרונות
שורש כפול חיובי, או שורשים בסימנים שונים ($t_1t_2<0$).

בדיוק פתרון אחד
$t=0$ שורש והשני שלילי, או שורש כפול $t=0$.

אין פתרונות
$\Delta<0$, או שני השורשים שליליים.

נושא 6 · דוגמה פתורה

כמה פתרונות יש למשוואה $x^4-(m+1)x^2+m=0$, לפי ערכי m?

1. $t=1 \Rightarrow t^2-(m+1)t+m=0$ או $t=m$.
   פירוק: סכום השורשים $m+1$, מכפלתם m.
2. $t=1$ תמיד נותן שני פתרונות: $x=\pm1$.
   $t>0$.
3. $t=m$:$m<0$ שלילי — סך הכול 2.
   אין פתרון מ-$t=m$.
4. $t=0$:$m=0$ נותן $x=0$ — סך הכול 3.
   פתרון אחד מ-$t=0$.
5. $m<0$ או $m>1$:4 פתרונות; $m=1$: שורש כפול — 2.
   שני שורשים חיוביים שונים, או אחד.

בדיקה: $m=4$: $x^4-5x^2+4=0$, $x=\pm1,\pm2$ — ארבעה ✓.

מלכודות

- סופרים פתרונות ב-t במקום ב-x.
- שוכחים ש-$t<0$ לא נותן כלום.
- סופרים $t=0$ כשני פתרונות.

משוואה דו-ריבועית או עם |x|: מספר פתרונות

1. כמה פתרונות יש ל-$x^4-5x^2+4=0$?

2. כמה פתרונות יש ל-$x^4+3x^2-4=0$?

3. כמה פתרונות יש למשוואה $x^4-3x^2-4=0$?

4. לכמה ערכים שלמים של m בקטע $[-5,5]$ יש למשוואה $x^4-(m+1)x^2+2(m-1)=0$ בדיוק 4 פתרונות?

משוואה דו-ריבועית או עם |x|: מספר פתרונות

5 מהו הערך השלם הקטן ביותר של m שעבורו אין למשוואה $x^4-2x^2+m=0$ פתרונות?

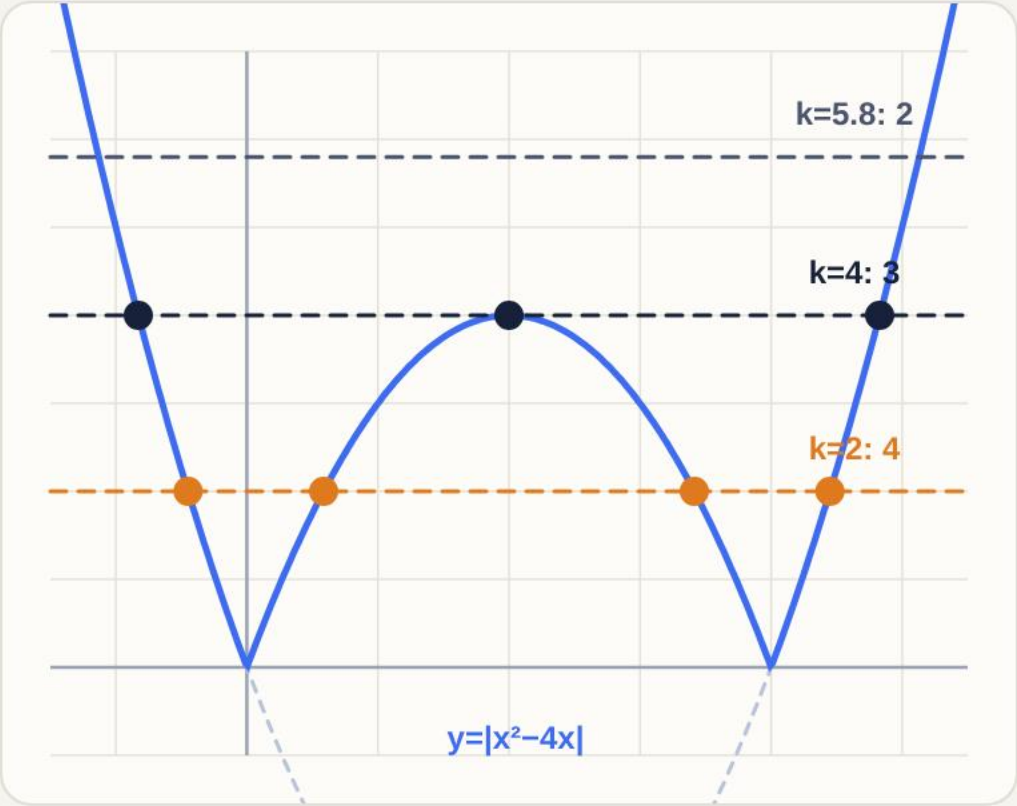
6 כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $(x^2+x)^2-2(x^2+x)-3=0$?

7 כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $(x^2+x)^2-5(x^2+x)+6=0$?

תשובות ורעיון הפתרון

#	תשובה	הרעיון
1	4	$t=x^2\ge 0$.
2	2	$t=x^2\ge 0$; שורש שלילי של t נפסל.
3	2	אחרי ההצבה בודקים את הסימן של כל שורש ב-t.
4	3	השורשים $t=2$ ו-$t=m-1$; צריך ש-$m-1$ יהיה חיובי ושונה מ-2.
5	2	אין פתרונות כשאין שורשים ב-t, או כשכולם שליליים.
6	2	הצבה הופכת את המשוואה לריבועית ב-t; לכל t בודקים כמה x מקיימים $x^2+x=t$ (צריך $1+4t\ge 0$).
7	4	הצבה הופכת את המשוואה לריבועית ב-t; לכל t בודקים כמה x מקיימים $x^2+x=t$ (צריך $1+4t\ge 0$).

גרף עם ערכים מוחלטים ומספר פתרונות



שאלות "כמה פתרונות יש ל-f(x)=k" נפתרות בגרף ולא באלגברה: מספר הפתרונות שווה למספר נקודות החיתוך של הגרף y=f(x) עם הישר האופקי y=k. לכן משרטטים את f פעם אחת, ואז "מזיזים" את הישר מלמטה למעלה וסופרים חיתוכים.

גרפים עם ערכים מוחלטים בונים בשכבות. כל שכבה היא פעולה פשוטה על הגרף הקודם:

- |f(x)| — החלק שמתחת לציר x משתקף מעליו.
- f(x)-c — כל הגרף יורד ב-c.
- f(|x|) — מוחקים את מה שמשמאל לציר y ומשקפים את הצד הימני.

הנקודות החשובות בשרטוט: קודקודים, נקודות חיתוך עם הצירים ו"שפיצים" של ערך מוחלט. ערכי k שעוברים בהן הם הגבולות שבהם מספר הפתרונות משתנה.

איך פותרים

1. מתחילים מהפונקציה הפנימית (בדרך כלל פרבולה): קודקוד ונקודות אפס.
   זה השלד שעליו בונים.
2. מוסיפים שכבה אחרי שכבה (ערך מוחלט, הזזה, ערך מוחלט נוסף), ומעדכנים את הנקודות המיוחדות.
   כל שכבה משנה רק חלק מהגרף.
3. רושמים את ערכי y של כל נקודה מיוחדת (קודקודים, שפיצים).
   אלה ערכי k הקריטיים.
4. עוברים על הקטעים בין ערכי k הקריטיים, ובכל קטע ובכל ערך קריטי סופרים חיתוכים.
   גם ערך גבולי הוא מקרה נפרד.
5. עונים לשאלה: לאילו k יש בדיוק n פתרונות.
   לרוב התשובה היא קטע פתוח או ערכים בודדים.

מקרים שחוזרים במבחן

$x^2-4x|=k|$

$k<0$: אין פתרון. · $k=0$: שניים. · $0<k<4$: ארבעה. · $k=4$: שלושה. · $k>4$: שניים.

$f|-c|=k||$

אחרי ההזזה למטה חלק מהגרף שוב מתחת לציר — הוא משתקף ויוצר "שפיצים" חדשים בגובה 0 ו"גבעות" בגובה c.

$f(|x|)=k$

הגרף סימטרי: כל פתרון $x>0$ נותן גם $-x$. פתרון ב-$x=0$ נספר פעם אחת.

כמה פתרונות למשוואה עם פרמטר

מעבירים את הפרמטר לצד אחד: $f(x)=k$, ואז אותה שיטה.

נושא 7 · דוגמה פתורה

לאילו ערכי k יש למשוואה ||x²-4x|-2|=k בדיוק 6 פתרונות?

1. $y=|x^2-4x|$: אפסים ב-0, 4; גבעה בגובה 4 ב-$x=2$.
   הקודקוד (2,-4) משתקף ל-(2,4).
2. $y=|x^2-4x|-2$: האפסים יורדים ל--2, הגבעה לגובה 2.
   הזזה למטה ב-2.
3. ערך מוחלט שוב: השפיצים ב-$x=0,4$ עולים לגובה 2, ונוצרים אפסים חדשים; הגבעה נשארת בגובה 2.
   החלקים השליליים משתקפים.
4. הגרף נוגע בגובה 2 בשלוש נקודות (שני שפיצים וגבעה) ויורד ל-0 בארבע נקודות.
   ערכי k קריטיים: 0 ו-2.
5. ל-$0<k<2$: שמונה חיתוכים; $k=2$: חמישה; $2<k$: שניים; $k=0$: ארבעה.
   סופרים בכל קטע.
6. אין k עם בדיוק 6 פתרונות.
   המספר 6 לא מופיע ברשימה.

בדיקה: $k=1$: $|x^2-4x|=3$ (ארבעה פתרונות) או $|x^2-4x|=1$ (ארבעה) — יחד שמונה ✓.

מלכודות

- שוכחים לשקף את החלק שמתחת לציר.
- לא סופרים בנפרד את ערכי k הקריטיים.
- מבלבלים בין $|f(x)|$ ל-$f(|x|)$.

גרף עם ערכים מוחלטים ומספר פתרונות

1 כמה פתרונות יש למשוואה $|x^2-4|=3$?

2 לאילו ערכים של k יש למשוואה $|x^2-6x+5|=k$ בדיוק 4 פתרונות?

א. $k<4>0$ ב. $k>4$ ג. $k=4$ ד. $k<5>0$

3 כמה פתרונות יש למשוואה $|x^2-4x|=4$?

4 כמה פתרונות יש למשוואה $|x^2-2|x|-3|=3.5$?

גרף עם ערכים מוחלטים ומספר פתרונות

5 כמה פתרונות יש למשוואה $||x^2-4x|-2|=2$?

6 כמה פתרונות יש למשוואה $|x^2-4|=2$?

7 כמה פתרונות יש למשוואה $|x^2-1|=1$?

תשובות ורעיון הפתרון

#	תשובה	הרעיון
1	4	|f|=3 שקול ל-f=3 או f=-3.
2	k<4>0	x²-6x+5: קודקוד (3,-4); בערך מוחלט החלק התחתון מתהפך לשיא בגובה 4.
3	3	ערך k שווה לגובה הגבעה — הישר נוגע בה בנקודה אחת.
4	6	בונים בשכבות: f(|x|) ואז |·|; סופרים חיתוכים עם y=3.5.
5	5	שוב פותחים את החיצוני ומשתמשים בתוצאות הידועות.
6	4	הגרף של |x²-4| הוא פרבולה שחלקה השלילי משוקף למעלה; מספר החיתוכים עם y=2 תלוי בגובה של ה"גבעה".
7	3	הגרף של |x²-1| הוא פרבולה שחלקה השלילי משוקף למעלה; מספר החיתוכים עם y=1 תלוי בגובה של ה"גבעה".

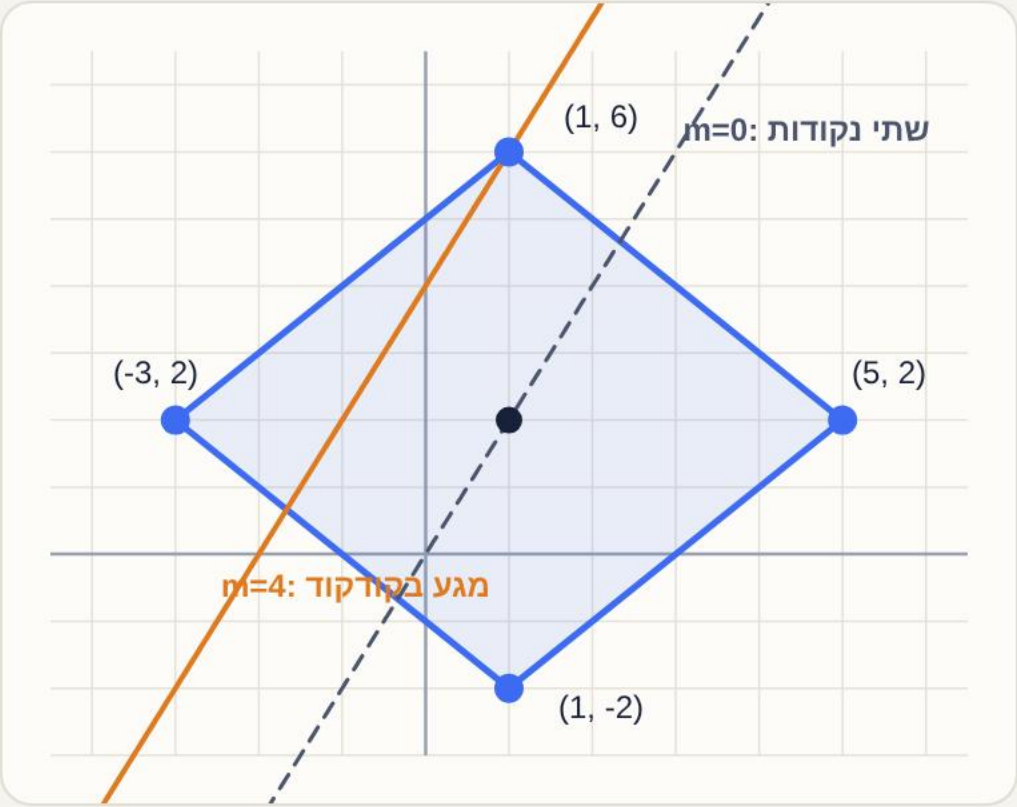
מקום גיאומטרי עם ערך מוחלט

מקום גיאומטרי הוא קבוצת כל הנקודות (x,y) שמקיימות משוואה. עם ערכים מוחלטים פותרים בפיצול למקרים לפי הסימן של כל ביטוי בתוך ערך מוחלט: בכל רביע (ביחס לנקודת המרכז) המשוואה היא ישר, ויחד הם יוצרים צורה שבורה.

$$|x-a|+|y-b|=r$$

הצורה הכי נפוצה: ריבוע מסובב ב-45° ("יהלום") שמרכזו (a,b) וקודקודיו במרחק r מהמרכז לאורך הצירים: (a±r,b) ו-(a,b±r). הצלעות בשיפוע ±1. ושאלות המשך: מערכת עם ישר — כמה נקודות חיתוך יש לפי הפרמטר.

$|x-a|+|y-b|\le r$ הוא כל השטח בתוך היהלום; $|x|=|y|$ הוא שני הישרים $y=\pm x$.



נושא 8 · שלבים

איך פותרים

1. מוצאים את הנקודות שבהן הביטויים בערך מוחלט מתאפסים — הן מחלקות את המישור לאזורים.
   בכל אזור הסימנים ידועים.
2. בכל אזור פותחים את הערכים המוחלטים ומקבלים משוואת ישר.
   רק החלק שבתוך האזור שייך לצורה.
3. משרטטים את כל הקטעים ומזהים את הצורה (יהלום, מלבן, זוג ישרים).
   קודקודים — בנקודות המעבר בין אזורים.
4. לשאלת מערכת עם ישר: משרטטים את הישר במצבים שונים של הפרמטר.
   מחפשים מצבי מגע בקודקוד או התלכדות עם צלע.
5. מחשבים את ערכי הפרמטר הקריטיים בהצבת קודקודים בישר.
   בהם מספר החיתוכים משתנה.

מקרים שחוזרים במבחן

יהלום

$|x-a|+|y-b|=r$: קודקודים $(a\pm r,b)$, $(a,b\pm r)$; שטח $2r^2$; היקף $2r\sqrt{4}$.

שני ישרים מצטלבים

$|x-a|=|y-b|$: $y-b=\pm(x-a)$.

מלבן / ריבוע

$\max(|x|,|y|)=r$ — ריבוע רגיל; לעיתים נשאל כמערכת של שני אי-שוויונות.

ישר שנוגע ביהלום בנקודה אחת

ישר תלול או מתון יותר מהצלעות נוגע בנקודה אחת רק בקודקוד. ישר בשיפוע ± 1 מתלכד עם צלע (אינסוף נקודות) או חותך בשתיים.

נושא 8 · דוגמה פתורה

שרטטו את |y-2|+|x-1|=4. לאילו ערכי m יש לישר y=2x+m נקודה משותפת אחת בדיוק עם הצורה?

1. קודקודים: (5,2), (-3,2), (1,6), (1,-2).
   מרחק 4 מהמרכז בכל כיוון.
2. ישר בשיפוע 2 דרך (1,6): m=4+2=6 ⇒m.
   מגע מבחוץ בקודקוד העליון.
3. דרך (1,-2): m=-4+2=2- ⇒m.
   מגע בקודקוד התחתון.
4. תשובה: m=4 או m=-4. בין הערכים — שתי נקודות; מחוץ להם — אף אחת.
   הישר "מחליק" על פני היהלום.

בדיקה: m=0: הישר עובר דרך (1,2), המרכז — ברור שחותך בשתי נקודות ✓.

מלכודות

- משרטטים את הישר בכל המישור ולא רק באזור שלו.
- מבלבלים קודקודים: הם על הקווים האופקי והאנכי דרך המרכז.
- שוכחים מקרה שבו הישר מתלכד עם צלע.

מקום גיאומטרי עם ערך מוחלט

1. מהו שטח התחום $|x|+|y|\le 2$?
2. לאיזה $m>0$ יש למערכת $|x|+|y|=m,\ y=3$ פתרון יחיד?
3. מהו ההיקף של הצורה $|x|+|y|=2$? (עגל לשתי ספרות אחרי הנקודה)
4. כמה נקודות משותפות יש לצורה $|x|+|y|=4$ ולישר $y=x+2$?

מקום גיאומטרי עם ערך מוחלט

5 מהו הערך המקסימלי של $2x+y$ על הצורה $|x-1|+|y|=2$?

6 קבוצת הפתרונות של $|x-5|+|x-1|=4$ היא קטע. מה אורכו?

7 כמה פתרונות יש למשוואה $|x-6|+|x-2|=10$?

תשובות ורעיון הפתרון

#	תשובה	הרעיון
1	8	|x|+|y|≤2 — ריבוע מסובב עם קודקודים (±2,0),(0,±2).
2	3	הישר y=3 נוגע רק בקודקוד העליון.
3	11.314	צלע היהלום מחברת שני קודקודים סמוכים, למשל (2,0) ו-(0,2).
4	2	ישר בשיפוע 1 שעובר בתוך היהלום (בין הצלעות המקבילות לו) חותך את שתי הצלעות האחרות.
5	6	על מצולע, ביטוי ליניארי מקבל את הקיצון באחד הקודקודים — בודקים את כולם.
6	4	|x-5|+|x-1| הוא סכום המרחקים מ-x לנקודות 1 ו-5; בין הנקודות הסכום קבוע ושווה למרחק ביניהן.
7	2	סכום המרחקים מ-x לשתי הנקודות הוא לפחות המרחק ביניהן (4); אם 4<10 יש בדיוק שני פתרונות, אחד מכל צד.

לפני שמגישים

צ׳ק־ליסט אחרון

בכל שבר — תחום הגדרה רשום, ונקודות המכנה לא בתשובה.

בכל שורש — התנאים נבדקו אחרי העלאה בריבוע.

בכל פרמטר — המקרים המיוחדים (a=0, D=0, ערכי k קריטיים) נבדקו לחוד.

תנאים של "וגם" — חיתוך; מקרים נפרדים — איחוד.

קצה קטע: סוגר מרובע רק כשהנקודה באמת מקיימת את התנאי.

הצבת ערך אחד מהתשובה בשאלה המקורית — חצי דקה שמצילה נקודות.

סימולציה מלאה של הבוחן: shlav.vercel.app/he/exams/math-mid-a/simulation